NIEPEWNOŚCI POMIAROWE WIELKOŚCI MIERZONYCH BEZPOŚREDNIO

ΔW_{max} - bezwzględna niepewność pomiarowa (dokładność pomiaru). Jej źródłem może być przypadkowy rozrzut wyników pomiarów, dokładność przyrządu, wpływ warunków atmosferycznych, dokładność odczytu czy też zapisanie wyniku z niewłaściwą jednostką, np. natężenie w [A] zamiast [mA].

Niepewności pomiarowe mierzone bezpośrednio związane z dokładnością przyrządu

Masa (Δm_{max}) dokładność wagi elektronicznej (zwykle jest to 1g, 0,1g lub 0,01g), dla wagi szalkowej jest to wartość najmniejszego odważnika, który powoduje wychylenie szalek z położenia równowagi

Czas (Δt_{max}) suma niedokładności stopera (0,01s) i niepewności związanej z czasem reakcji mierzącego na start (0,2s) i na zatrzymanie (0,2s).

Temperatura (ΔT_{max}) dokładność termometru elektronicznego (zwykle jest to 1 deg lub 0,1 deg), dla termometru rtęciowego lub alkoholowego jest to wartość jednej lub połowy działki czyli 1 deg lub 0,5 deg.

Długość, średnica (Δl_{max}, Δd_{max}) wartość jednej działki przyrządu użytego do pomiaru: linijka (2 mm = $2x10^{-3}$ m), suwmiarka noniuszowa (0,02 mm = $2x10^{-5}$ m lub 0,05 mm = $5x10^{-5}$ m), suwmiarka zegarowa i cyfrowa (0,01 mm = 10^{-5} m) śruba mikrometryczna i miernik zegarowy (0,01 mm = 10^{-5} m), mikroskop - wartość działki skali okularu mikroskopu (podana przy mikroskopie używanym do pomiaru).

Natężenie, napięcie (ΔI_{max} , ΔU_{max}) - suma niepewności wynikającej z klasy miernika i niepewności związanej z odczytem.

a) miernik analogowy

$$\Delta I_{\max} = \Delta I'_{\max} + \Delta I''_{\max} = \frac{klasa \times zakres}{100} + \frac{zakres}{liczba działek}$$ (*wartość jednej lub połowy działki)*

b) miernik cyfrowy

$$\Delta I_{\max} = \Delta I'_{\max} + \Delta I''_{\max} = \frac{klasa \times zakres}{100} + \text{dokładność odczytu}$$

Opór, pojemność, indukcyjność dekadowa (ΔR_{max} , ΔC_{max} , ΔL_{max}) niepewność wynikająca z klasy. Jest równa sumie niepewności pomiarowych poszczególnych dekad (n jest niepewnością n-tej dekady)

$$\Delta R_{\max n} = \frac{klasa\% \times wsazanie\Omega}{100\%}$$

np.: dla R=851Ω niepewność pomiaru oporu wyniesie:

$$\Delta R_{\max} = \Delta R_{\max 1} + \Delta R_{\max 2} + \Delta R_{\max 3} = \frac{0,05\% \times 800\Omega}{100\%} + \frac{0,05\% \times 50\Omega}{100\%} + \frac{0,1\% \times 1\Omega}{100\%}$$
$$\Delta R_{\max} = 0,4\Omega + 0,025\Omega + 0,001\Omega = 0,426\Omega$$

Wszystkie wyniki podajemy w jednostkach układu SI (s, kg, m, A, K) pamiętając, że wartość obliczona i wartość niepewności pomiarowej muszą być tego samego rzędu:
Uzyskany w pomiarach wynik wyniósł 86,8 mm

Jeżeli więc Δl=0,2 mm = $0,2x10^{-3}$ m to zapiszemy l=(86,8 ± 0,2) $x10^{-3}$ m
Jeżeli więc Δl=2 mm = $2x10^{-3}$ m to musimy zaokrąglić wynik do tego samego rzędu co obliczona niepewność bezwzględna czyli zapiszemy: l=(87 ± 2) $x10^{-3}$ m

OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI POMIAROWEJ WIELKOŚCI WYZNACZANYCH POŚREDNIO

Załóżmy, że wzór, z którego obliczamy szukaną wielkość fizyczną jest funkcją trzech zmiennych:

$$W = W(x, y, z)$$

Ilość zmiennych (wielkości mierzonych bezpośrednio) zależy od wybranego ćwiczenia laboratoryjnego i może być równa od jeden do pięciu. Naszym zadaniem jest obliczenie niepewności bezwzględnej maksymalnej, niepewności względnej maksymalnej, niepewności względnej maksymalnej procentowej oraz niepewności popełnionej dla dowolnie wybranego wyniku wyznaczanej wielkości fizycznej z grupy wyników pomiarowych. To, którą z niepewności: względną czy bezwzględną obliczamy jako pierwszą, zależy od wyboru metody analizy niepewności pomiarowej.

W **metodzie szacunkowej** polegającej na obliczeniu zmiany wartości funkcji ***W*** przy przyroście każdej z wielkości mierzonych bezpośrednio o wielkość jej niepewności pomiaru (np. $x+\Delta x_{max}$), jako pierwszą obliczamy niepewność bezwzględną maksymalną:

$$\Delta W_{\max} = \left|W(x+\Delta x_{\max}, y, z) - W(x, y, z)\right| + \left|W(x, y+\Delta y_{\max}, z) - W(x, y, z)\right| + \left|W(x, y, z+\Delta z_{\max}) - W(x, y, z)\right|$$

gdzie poszczególne składniki odpowiadające każdej z wielkości mierzonych bezpośrednio obliczamy jako wartość bezwzględną różnicy między wartością wielkości ***W*** dla powiększonego argumentu ***x***, ***y*** albo ***z*** a wielkością ***W*** dla wartości zmierzonych.

Następnie obliczamy niepewność względną maksymalną:

$$\delta W_{\max} = \frac{\Delta W_{\max}}{W_{obliczone}}$$

oraz niepewność względną maksymalną procentową:

$$\delta W_{\max}\,\% = \frac{\Delta W_{\max}}{W_{obliczone}} \cdot 100\%$$

W **metodzie różniczkowej** jako pierwszą obliczamy niepewność względną maksymalną:

$$\delta W_{\max} = \frac{\Delta W_{\max}}{W} = \left|\frac{\partial W}{\partial x}\right| \cdot \frac{\Delta x_{\max}}{W} + \left|\frac{\partial W}{\partial y}\right| \cdot \frac{\Delta y_{\max}}{W} + \left|\frac{\partial W}{\partial z}\right| \cdot \frac{\Delta z_{\max}}{W}$$

gdzie poszczególne składniki we wzorze są równe wartości bezwzględnej z pochodnej cząstkowej wzoru ***W*** po kolejnej zmiennej (wielkości mierzonej) pomnożonej przez iloraz niepewności bezwzględnej maksymalnej tej wielkości i wzoru ***W***, z którego obliczamy szukaną wielkość fizyczną.

Następnie obliczamy niepewność względną maksymalną procentową:

$$\delta W_{\max}\,\% = \frac{\Delta W_{\max}}{W_{obliczone}} \cdot 100\%$$

oraz niepewność bezwzględną maksymalną:

$$\Delta W_{\max} = \delta W_{\max} \cdot W_{obliczone}$$

Niezależnie od wyboru metody analizy niepewności pomiarowej obliczamy jeszcze niepewność pomiarową popełnioną:

$$\Delta W_{popełopełn} = \left| W_{zmierzone} - W_{średnie} \right|$$

gdzie $W_{zmierzone}$ jest największym odchyleniem od wartości średniej wielkości mierzonej

Na koniec sprawdzamy warunek:

$$\Delta W_{\max} \geq \Delta W_{popenione}$$

Podajemy ostateczny wynik: W= ($W_{obliczone} \pm \Delta W_{max}$) jednostka

METODA GAUSSA

W niektórych doświadczeniach pomiar wielkości fizycznej (umownie oznaczonej przez *x*) nie daje tej samej wartości dla kolejnych powtórzeń pomiaru, a wartości wykraczają poza dokładność wskazań przyrządu pomiarowego. Ocenę niepewności pomiarowej wielkości mierzonej przeprowadzamy metodą Gaussa. Należy w tym celu wykonać min. 30 pomiarów.

Dane wpisujemy do tabeli:

l.p.	x	$\bar{x}$	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	σ_x	$3\sigma_x$	$\sigma_{\bar{x}}$
1							
2							
3							
n							
			$\sum_{i=1}^{n} =$	$\sum_{i=1}^{n} =$			

Miarą rozrzutu punktów pomiarowych wielkości x jest odchylenie standardowe:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

gdzie x_i oznacza i-ty wynik pomiaru, a $x_{\text{śr}}$ ich średnią arytmetyczną. W przedziale $< x_{\text{śr}} - \sigma_{xi}, x_{\text{śr}} + \sigma_{xi} >$ leży około 68,3% wszystkich wyników pomiarów, natomiast w przedziale trzykrotnie większym, tzn. wewnątrz $< x_{\text{śr}} - 3\sigma_{xi}, x_{\text{śr}} + 3\sigma_{xi} >$ leży ich aż 99,7% (399 na 400 pomiarów), czyli w praktyce wszystkie wyniki poprawnie wykonanych pomiarów.

Dodatkowo obliczamy odchylenie standardowe wartości średniej:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Sprawdzamy czy kryterium 3σ jest spełnione:

$$\left| x - \bar{x} \right| \langle 3\sigma_x$$

Gdy kryterium 3σ jest spełnione więc ostatecznie możemy zapisać:

$x = \bar{x} \pm \sigma_x = (...............\pm...............)$ jednostka oraz
$x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} = (...............\pm...............)$ jednostka

METODA NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW

Metodę najmniejszych kwadratów stosujemy w przypadku kiedy jedna wielkość mierzona (y) jest funkcją innej mierzonej wielkości (x) przy równoległym pomiarze obydwu wielkości.

Załóżmy, że mamy funkcję: $f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} w_i (ax_i + b - y_i)^2$

w_i jest wagą statystyczną pomiaru, którą przyjmujemy za =1 jeżeli wszystkie pomiary są jednakowo dokładne. W ogólności dla pojedynczego pomiaru $w_i = \sqrt{n_i}$

Funkcja $f(a,b)$ ta osiąga minimum jeżeli $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ oraz $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$

Układ ten można rozwiązać przy pomocy wyznaczników Cramera:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} w_i & \sum_{i=1}^{n} w_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} w_i y_i & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} w_i & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 \end{vmatrix}$$

Błędy, którymi obarczone są wielkości a i b obliczamy stosując średnie odchylenia standardowe $\sigma_a = \Delta a$ i $\sigma_b = \Delta b$

$$\Delta a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{i=1}^{n} w_i (ax_i + b - y_i)^2}{\Delta(n-2)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i' - y_i)^2}{\Delta(n-2)}}$$

$$\Delta b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 \sum_{i=1}^{n} w_i (ax_i + b - y_i)^2}{\Delta(n-2)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i' - y_i)^2}{\Delta(n-2)}}$$

gdzie: $y_i' = ax_i + b$

Dane wpisujemy do tabeli:

L.p	x_i	y_i	y_i'	$y = (y_i' - y_i)$	y^2	x_i^2	$x_i y_i$	w_i	a	b
1.										
2.										
n.										
	$\sum_{i=1}^{n}=$	$\sum_{i=1}^{n}=$			$\sum_{i=1}^{n}=$	$\sum_{i=1}^{n}=$	$\sum_{i=1}^{n}=$	$\sum_{i=1}^{n}=$		

Ostatecznie zapisujemy:

$$y = (a \pm \Delta a)x + (b \pm \Delta b)$$